ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THẾ ANH

VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM JENSEN, TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THẾ ANH

VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM JENSEN, TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN XUÂN QUÝ

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{Q}$	tập hợp các số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực dương
$\mathbb{C}$	tập hợp các số phức
$\mathbb{R}^2$	tập hợp các cặp (x, y) số thực
$\mathbb{K}$	tập $\mathbb{R}$ hoặc tập $\mathbb{C}$
$\mathbb{K}^N$	tập $\mathbb{R}^N$ hoặc tập $\mathbb{C}^N$
X	không gian định chuẩn hoặc không gian Banach
N	số nguyên dương N
$\mathbb{R}^N$	tập hợp các bộ số thực $(x_1, ..., x_N)$
$(-c, c)^N$	tập hợp các bộ số $(x_1, ..., x_N)$ trong khoảng $(-c, c)$
$\|u\|$	giá trị tuyệt đối của số thực u hoặc module của số phức u
$\\|u\\|$	chuẩn của u
E_1	không gian định chuẩn thực
E, E_2	không gian Bannach thực
(JE)	phương trình hàm Jensen
J	hàm Jensen
J-lõm	hàm Jensen lõm
J-lồi	hàm Jensen lồi

Mở đầu

Phương trình hàm là một nhánh của Toán học hiện đại, từ năm 1747 đến 1750 nhà toán học J. D'Alembert đã công bố 3 bài báo liên quan về phương trình hàm, đây được xem là các kết quả đầu tiên về phương trình hàm. Nhiều nhà toán học (tiêu biểu: N.H. Abel, J. Bolyai, A.L. Cauchy, J. D'Alembert, L. Euler, M. Fréchet, C.F. Gauss, J.L.W.V. Jensen, A.N. Kolmogorov, N.I. Lobacevskii, J.V. Pexider, và S.D. Poisson) đã tiếp cận phương trình hàm theo các mục tiêu nghiên cứu khác nhau, như nghiên cứu định tính (xác định một số đặc trưng cơ bản của hàm số) hoặc nghiên cứu định lượng (ước lượng nghiệm, số nghiệm hay dạng cụ thể của nghiệm), nghiên cứu nghiệm địa phương hoặc nghiệm toàn cục, nghiên cứu nghiệm liên tục hay nghiệm có tính gián đoạn,...

Dựa vào các phương pháp tiếp cận đó, luận văn đã được hoàn thành với tên đề tài là: ***Về phương trình hàm Jensen, tính ổn định và ứng dụng.***

Nội dung luận văn sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản về phương trình hàm Jensen, tính ổn định và ứng dụng. Các kết quả này được trích dẫn từ tài liệu tham khảo [1] và một số tài liệu liên quan.

Ngoài mục lục, lời nói đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận văn được trình bày trong 2 chương.

Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này luận văn trình bày một số kiến thức về không gian định chuẩn và sự hội tụ, không gian Banach và tiêu chuẩn hội tụ Cauchy, về hàm lồi, hàm cộng tính và một số kết quả.

Chương 2. Phương trình hàm Jensen và tính ổn định

Ở chương này luận văn trình bày về phương trình hàm Jensen, cách tìm nghiệm của phương trình hàm Jensen xác định trên trường số thực và chỉ ra nghiệm liên tục của nó là affine. Sau đó, nghiên cứu nghiệm liên tục của phương trình hàm Jensen trên khoảng đóng và bị chặn. Tiếp theo, nghiên cứu nghiệm của phương trình hàm kiểu Jensen liên hệ từ bất đẳng thức Popoviciu và một số bài tập áp dụng. Và cuối cùng, luận văn trình bày tính ổn định của phương trình hàm Jensen trong đó có tính ổn định Hyers-Ulam-Rassias, sự ổn định trên miền giới hạn và phương pháp điểm bất động.

Luận văn được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin gửi cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa Toán Tin và Phòng Đào tạo của trường. Trân trọng cảm ơn các Thầy, Cô đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất trong quá trình học tập. Đặc biệt, tôi xin gửi lời biết ơn chân thành đến TS. Trần Xuân Quý, người Thầy đã hướng dẫn tôi hoàn thành bản luận văn này. Mặc dù rất bận rộn trong công việc nhưng Thầy vẫn dành nhiều thời gian và tâm huyết trong việc hướng dẫn, động viên khuyến khích tôi trong suốt thời gian tôi thực hiện đề tài. Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè, đồng nghiệp, những người không ngừng động viên, hỗ trợ tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Thái Nguyên, ngày 05 tháng 5 năm 2017

Tác giả luận văn

Học viên. Hoàng Thế Anh

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Với mục tiêu tìm hiểu về phương trình hàm Jensen, tính ổn định và ứng dụng, trong chương này luận văn trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian định chuẩn và sự hội tụ, không gian Banach và tiêu chuẩn hội tụ Cauchy, về hàm lồi, hàm cộng tính và một số kết quả.

1.1 Không gian định chuẩn và sự hội tụ

Đặt $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$. Khi đó, X được gọi là một không gian định chuẩn trên $\mathbb{K}$ nếu và chỉ nếu tồn tại một chuẩn $\|\cdot\|$ trên X, nghĩa là với mọi $u, v \in X$ và $\alpha \in \mathbb{K}$, ta có các khẳng định sau:

(i) $\|u\| \geq 0$ (tức là $\|u\|$ là một số thực không âm);

(ii) $\|u\| = 0$ nếu $u = 0$;

(iii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\, \|u\|$;

(iv) $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$.

Không gian định chuẩn tương ứng trên $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ được gọi là không gian định chuẩn thực hoặc phức. Số $\|u - v\|$ được gọi là khoảng cách giữa 2 điểm u và v. Đặc biệt, $\|u\|$ là khoảng cách giữa điểm u và điểm gốc $v = 0$. Vì $-u = (-1)u$, nên từ (iii) của định nghĩa trên ta có $\|-u\| = \|u\|$ với mọi $u \in X$.
Từ (iv) ta có $\|(u + v) - \mathrm{w}\| \le \|u + v\| + \|\mathrm{w}\| \le \|u\| + \|v\| + \|\mathrm{w}\|$.
Tổng quát, bằng quy nạp ta có $\left\|\sum\limits_{j=1}^{N} u_j\right\| \le \sum\limits_{j=1}^{N} \|u_j\|$ với mọi $u_1, ..., u_N \in X, N = 1, 2, ...$

Ví dụ 1.1.2. Cho $X := \mathbb{R}$. Ta đặt

$$\|u\| := |u|$$

với mọi $u \in \mathbb{R}$, với $|u|$ là một giá trị tuyệt đối của u. Khi đó, $X = \mathbb{R}$ được gọi là một không gian định chuẩn thực.

Ví dụ 1.1.3. Cho $X := \mathbb{C}$. Ta đặt

$$\|u\| := |u|$$

với mọi $u \in \mathbb{C}$, với $|u|$ là một module của số phức u. Khi đó, X được gọi là một không gian định chuẩn phức.

Mệnh đề 1.1.4. *Cho X là một không gian định chuẩn. Khi đó, với mọi $u, v \in X$, ta có bất đẳng thức sau*

$$|\|u\| - \|v\|| \le \|u \pm v\| \le \|u\| + \|v\|.$$

Định nghĩa 1.1.5. Cho (u_n) là một dãy trong không gian định chuẩn X, tức là, $u_n \in X$ với mọi n. Ký hiệu

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u$$

nếu $\lim\limits_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0$.

Ta nói rằng giới hạn của dãy (u_n) hội tụ về u. Ta cũng có thể ký hiệu $u_n \to u$ khi $n \to \infty$.

Mệnh đề 1.1.6. *Cho X là một không gian định chuẩn trên $\mathbb{K}$. Cho $u_n, v_n, u, v \in X$ và $\alpha_n, \alpha \in \mathbb{K}$ với mọi $n = 1, 2, ...$ Khi đó ta có các khẳng định sau*

(i) Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, thì giới hạn đó là duy nhất.

(ii) Nếu $u_n \to u$ khi $n \to \infty$, thì (u_n) là bị chặn, nghĩa là tồn tại một số $r \geq 0$ thỏa mãn $\|u_n\| \leq r$ với mọi n.

(iii) Nếu $u_n \to u$ khi $n \to \infty$, thì $\|u_n\| \to \|u\|$ khi $n \to \infty$.

(iv) Nếu $u_n \to u$ và $v_n \to v$ khi $n \to \infty$ thì $u_n + v_n \to u + v$ khi $n \to \infty$.

(v) Nếu $u_n \to u$ và $\alpha_n \to \alpha$ khi $n \to \infty$ thì $\alpha_n u_n \to \alpha u$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.1.7. Dãy (u_n) trên không gian định chuẩn X gọi là dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $n_0(\varepsilon)$ thỏa mãn

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

với mọi $n, m \geq n_0(\varepsilon)$.

Mệnh đề 1.1.8. *Trong không gian định chuẩn, mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy.*

1.2 Không gian Banach và tiêu chuẩn hội tụ Cauchy

Định nghĩa 1.2.1. Không gian định chuẩn X gọi là không gian Banach nếu và chỉ nếu mọi dãy Cauchy của nó đều hội tụ.

Ví dụ 1.2.2. Không gian $X := \mathbb{K}$ là không gian Banach trên $\mathbb{K}$ với chuẩn

$$\|u\| := |u|$$

với mọi $u \in \mathbb{K}$.

Ví dụ 1.2.3. Với $N = 1, 2, \ldots$. Không gian $X := \mathbb{K}^N$ là không gian Banach trên $\mathbb{K}$ với chuẩn $\|x\| := |x|_\infty$, trong đó

$$|x|_\infty := \max_{1 \le j \le N} |\xi_j|,$$

với $x = (\xi_{1,\ldots,}\xi_N)$.

Xét $x_n = (\xi_{1n,\ldots,}\xi_{Nn})$. Khi đó
$\lim_{n\to\infty} |x_n - x|_\infty = 0$ nếu $\lim_{n\to\infty} \xi_{kn} = \xi_k$ với mọi $k = 1, \ldots, N$.

Ví dụ 1.2.4. Với $N = 1, 2, \ldots$. Không gian $X := \mathbb{K}^N$ là không gian Banach với chuẩn Euclide $\|\cdot\|$, với

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

trong đó $x = (\xi_{1,\ldots,}\xi_N)$. Ngoài ra

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \text{ nếu } \lim_{n\to\infty} \xi_{kn} = \xi_k \text{ với mọi } k = 1, \ldots, N.$$

Ví dụ 1.2.5. Với $-\infty < a < b < +\infty$. Khi đó, $X := C[a, b]$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|u\| := \max_{a \le x \le b} |u(x)|.$$

Sự hội tụ $u_n \to x$ khi $n \to \infty$ trong X, hay được hiểu là

$$\|u_n - u\| = \mathop{max}_{a \le x \le b} |u_n(x) - u(x)| \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Mệnh đề 1.2.6. *Cho (u_n) là dãy Cauchy trong không gian định chuẩn X. Dãy (u_n) chứa một dãy con (u_{n_k}) hội tụ tới u. Khi đó dãy (u_n) cũng hội tụ tới u.*